

CURSO : MA22A-02 CALCULO EN VARIAS VARIABLES

PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR

FECHA: 09 / 04 / 2003

TIEMPO: 2,5 HORAS

CONTROL #1

1.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en $(0,0)$:

$$\text{i)} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 |y|^a}{x^6 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad (\text{en funci3n de } \mathbf{a})$$

$$\text{ii)} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\text{iii)} \quad h(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cos y - y \cos x - x + y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Recuerde que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$

2.- a) Sean $f : R^2 \rightarrow R$ y $g : R^2 \rightarrow R$ dos funciones diferenciables.

Se define $z(u, v) = e^{f^2(u, v)g(u, v)}$

i) Determine las derivadas parciales de z ¿Es z diferenciable?

ii) Si $f(u, v) = \sqrt{uv}$ y $g(u, v) = 1/v$. Compruebe la fórmula obtenida en la parte i)

b) Sean f y g dos funciones reales de variable real, derivables en R . Se define la funci3n:

$$z(x, y) = x^2 y f(u) + x y^2 g(v) \text{ con } u = \frac{x}{y} \text{ y } v = \frac{y}{x}$$

Se pide calcular:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$$

c) Sean $g : R \rightarrow R$ y $h : R^2 \rightarrow R$ funciones diferenciables. Se define la funci3n:

$$f(x, y) = x^2 g\left(\frac{x}{y}\right) + x y h\left(\frac{x}{x+y}, \frac{x^2}{y^2}\right)$$

Demuestre que: $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f$

3.- Sean f, g funciones de $R^2 \rightarrow R$ definidas por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{y - x^2} & y \neq x^2 \\ 0 & y = x^2 \end{cases}$$

Para cada una de ellas:

- Encuentre las direcciones donde existe la derivada direccional en el origen.
- Estudie la continuidad de las derivadas parciales en el origen.
- Estudie la diferenciabilidad en el origen.

PAUTA DE CORRECCION CONTROL #1

1.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en (0,0):

$$i) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 |y|^a}{x^6 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad (\text{en función de } a)$$

Solución

$$\text{Sea } x = y^3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 |x^3|^a}{x^6 + x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} x^{-4+3a} \neq 0 \quad \text{si} \quad -4 + 3a \leq 0 \Rightarrow a \leq \frac{4}{3}$$

Si $a \leq 4/3$ $f(x,y)$ es discontinua en (0,0)

Si $a > 4/3$ $f(x,y)$ es continua en (0,0)

En efecto, como $|x| \leq \sqrt[6]{x^6 + y^2}$ $|y| \leq \sqrt[2]{x^6 + y^2}$

$$\left| \frac{x^2 |y|^a}{x^6 + y^2} \right| \leq \left| \frac{(x^6 + y^2)^{1/3} (x^6 + y^2)^{a/2}}{x^6 + y^2} \right| = |x^6 + y^2|^{\frac{a}{2} - \frac{2}{3}} < e \quad \text{si} \quad \frac{a}{2} - \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow a > \frac{4}{3}$$

$$ii) \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$iii) \quad h(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cos y - y \cos x - x + y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\text{Recuerde que } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$$

2.- a) Sean $f : R^2 \rightarrow R$ y $g : R^2 \rightarrow R$ dos funciones diferenciables.

Se define $z(u, v) = e^{f^2(u,v)g(u,v)}$

i) Determine las derivadas parciales de z ¿Es z diferenciable?

ii) Si $f(u, v) = \sqrt{uv}$ y $g(u, v) = 1/v$. Compruebe la fórmula obtenida en la parte i)

b) Sean f y g dos funciones reales de variable real, derivables en R . Se define la función:

$$z(x, y) = x^2 y f(u) + x y^2 g(v) \text{ con } u = \frac{x}{y} \text{ y } v = \frac{y}{x}$$

Se pide calcular:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$$

c) Sean $g : R \rightarrow R$ y $h : R^2 \rightarrow R$ funciones diferenciables. Se define la función:

$$f(x, y) = x^2 g\left(\frac{x}{y}\right) + xyh\left(\frac{x}{x+y}, \frac{x^2}{y^2}\right)$$

Demuestre que: $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f$

3.- Sean f, g funciones de $R^2 \rightarrow R$ definidas por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{y - x^2} & y \neq x^2 \\ 0 & y = x^2 \end{cases}$$

Para cada una de ellas:

- Encuentre las direcciones donde existe la derivada direccional en el origen.
- Estudie la continuidad de las derivadas parciales en el origen.
- Estudie la diferenciabilidad en el origen.